Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Metody analizy danych
923
ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2013; 923: 99–117
DOI: 10.15678/ZNUEK.2013.0923.08

Bogumiła Krzeszowska-Zakrzewska
Katedra Badań Operacyjnych
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Zastosowanie programowania zero-jedynkowego w harmonogramowaniu czynności projektu

Streszczenie

Ze względu na znaczący wzrost zainteresowania zagadnieniami związanymi z zarządzaniem projektami coraz częściej w literaturze przedmiotu podejmowany jest problem harmonogramowania czynności projektu. Głównymi technikami harmonogramowania czynności projektu są: wykres Gantta, metoda PERT i metoda CPM. Techniki te dostarczają czytelnych harmonogramów optymalizujących czas trwania projektu, a także zapewniają kontrolę wykorzystania zasobów w projekcie. W praktyce harmonogramy projektów mogą być optymalizowane nie tylko ze względu na czas trwania projektu, lecz także ze względu na poziom wykorzystania zasobów czy przepływy pieniężne. Wspomniane wyżej techniki nie uwzględniają tych czynników w optymalizacji harmonogramu.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie modeli matematycznych harmonogramowania czynności projektów. Przedstawione zostaną trzy modele: model optymalizujący czas trwania projektu, model optymalizujący poziom wykorzystania zasobów oraz model optymalizujący przepływy pieniężne w projekcie. Cechą wspólną prezentowanych modeli matematycznych jest binarna postać zmiennej. Dodatkowo każdy model posiada ograniczenia dotyczące relacji kolejnościowych wykonywania czynności oraz uwzględnia warunek, że każda czynność może zostać wykonana tyko raz.

Do rozwiązania przedstawionych modeli zastosowano programowanie zero-jedynkowe, które jest szczególnym przypadkiem programowania całkowitoliczbowego.

Słowa kluczowe: harmonogramowanie projektu, programowanie zero-jedynkowe, optymalizacja harmonogramów, optymalizacja wielokryterialna.

1. Wprowadzenie

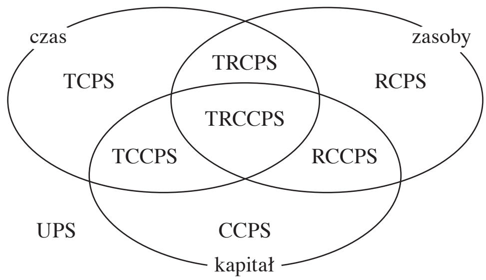
Ze względu na rosnące znaczenie projektów we współczesnych organizacjach w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat nastąpił rozwój dziedziny zarządzania projektem. Według jednej z definicji projekt (często określany także jako przedsięwzięcie) to zbiór działań lub prac, które służą do realizacji celu jedynego i mierzalnego [Brandenburg 2002]. Każdy projekt składa się m.in. z takich elementów, jak: czynności (zadania bądź operacje, które trwają określony czas oraz wymagają zasobów do realizacji), zasoby (niezbędne do realizacji czynności) oraz relacje kolejnościowe (relacje odwzorowujące logiczną kolejność wykonywania czynności). Reasumując, projekt składa się z czynności, które generować mogą koszty lub przepływy pieniężne, są ograniczone przez relacje kolejnościowe, a do ich realizacji niezbędne są zasoby, których dostępność również jest ograniczona. Właśnie te składowe projektu sprawiają, że harmonogramowanie jest istotnym elementem procesu zarządzania projektem.

Harmonogram najogólniej określa kolejność i czas trwania poszczególnych czynności. Proces układania harmonogramów, czyli harmonogramowanie, można określić jako problem grupowania zasobów (lub zdarzeń) w pewnych punktach czasowych w danym okresie, w taki sposób aby osiągnąć określone cele i spełnić określone założenia [Norberciak 2002]. Podstawowymi technikami harmonogramowania projektu są metoda ścieżki krytycznej oraz metoda PERT [Branderburg 2002]. Wykorzystując te techniki, można uzyskać czytelne harmonogramy (przez wykorzystanie wykresu Gantta) optymalizujące czas trwania projektu oraz zapewniające kontrolę wykorzystania zasobów. W praktyce optymalizować można nie tylko czas trwania projektów, lecz również wykorzystanie zasobów czy generowane przepływy pieniężne.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie problemu harmonogramowania czynności projektu jako zdania programowania zero-jedynkowego. Programowanie zero-jedynkowe jest szczególnym przypadkiem programowania całkowitoliczbowego, w którym zmienne przyjmują wartości binarne.

2. Modele matematyczne harmonogramowania projektów

Szerokie zainteresowanie projektami spowodowało rozwój metod optymalizacyjnych w harmonogramowaniu projektów. Obecnie nie ma jednoznacznej klasyfikacji problemów harmonogramowania projektów. Wynika to ze zróżnicowania tych problemów. Próbę usystematyzowania wiedzy na temat modeli harmonogramowania projektów podjął A. Kosturbiec [2003], który przedstawił klasyfikację harmonogramów opartą na rodzajach ograniczeń (rys. 1) i kierunkach optymalizacji (tabela 1). Zwrócił on uwagę na kluczową rolę ograniczeń w procesie planowania. Wyodrębnił problemy harmonogramowania: 1) bez ograniczeń, w którym kryterium optymalizacji stanowi czas trwania projektu lub przepływy pieniężne, 2) z ograniczeniami czasowymi, w którym kryterium optymalizacji stanowią zasoby lub przepływy pieniężne, 3) z ograniczeniami zasobowymi, 4) z ograniczonym kapitałem oraz 5) z wieloma ograniczeniami.



Oznaczenia: UPS (*uncontrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektów bez ograniczeń, TCPS (*time constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonym czasem, RCPS (*resource constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonymi zasobami, CCPS (*capital constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonym kapitałem, TRCPS (*time and resource constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonym czasem i zasobami, TCCPS (*time and capital constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonym czasem i kapitałem, RCCPS (*resource and capital constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonymi zasobami i kapitałem, TRCCPS (*time*, *resource and capital constrained project scheduling*) – harmonogramowanie projektu z ograniczonym czasem, zasobami i kapitałem.

Rys. 1. Ograniczenia w modelach harmonogramowania projektów

Źródło: [Kostrubiec 2003].

Tabela 1. Kierunki optymalizacji w modelach harmonogramowania projektów

Kryterium oceny	UPS	TCPS	RCPS	CCPS	TRCPS	TCCPS	RCCPS	TRCCPS
Czasowe	v	v	v	v	v	v	v	v
Obciążenie zasobów	v	v	–	v	–	v	–	–
Koszt[a]	v	v	v	v	v	v	v	v
NPV	v	v	v	v	v	v	v	v

Oznaczenia: jak do rys. 1.

[a] Dotyczy modeli ze zmiennnym zapotrzebowaniem na zasoby i/lub kapitał.

Źródło: [Kostrubiec 2003].

Najogólniej ujmując, można stwierdzić, że ograniczenia oraz kierunki optymalizacji i oceny harmonogramu realizacji projektu wynikają z trzech podstawowych czynników: czasu, zasobów oraz kapitału. Każdy z modeli optymalizacyjnych harmonogramowania projektu posiada ponadto ograniczenia dotyczące relacji kolejnościowych oraz warunki brzegowe.

Najprostszym z modeli jednokryterialnych optymalizacji harmonogramów projektu jest model bez ograniczeń wynikających z czasu, zasobów lub kapitału. R. Russell [1970] przedstawił model, w którym maksymalizowana była wartość NPV. Założył, że w momencie rozpoczęcia czynności ponoszone są wydatki, natomiast zakończenie pewnej grupy czynności generuje wpływy.

Inne modele optymalizacji harmonogramów projektu to modele z jednym typem ograniczeń. Wyróżnić można trzy typy takich modeli: z ograniczeniami czasowymi, z ograniczeniami zasobowymi oraz z ograniczonym kapitałem [Kosturbiec 2003].

Pracę na temat harmonogramowania projektu z ograniczeniem czasowym przedstawili M. Vanhoucke, E. Demeulemeester i W. Herrorlen [2002]. Rozważają oni problem z równomiernie rozłożonymi płatnościami. Celem przedstawionego w pracy modelu jest maksymalizacja wartości NPV. Ograniczeniem modelu jest czas realizacji projektu.

W grupie modeli harmonogramowania projektów z ograniczonymi zasobami można również wyróżnić modele bez przepływów pieniężnych (jak te wspomniane wcześniej), w których optymalizacji podlegają charakterystyki czasowe, oraz modele z przepływami pieniężnymi, w których optymalizacji podlegają charakterystyki ekonomiczne [Kosturbiec 2003].

Pracę na temat harmonogramowania projektów z ograniczonymi zasobami przedstawili np. M. Shouman i in. [2006]; zaprezentowali oni klasyczny model, w którym minimalizowany jest czas trwania projektu.

Problem optymalizacji harmonogramu projektu, w którym optymalizacji podlegały zdyskontowane przepływy pieniężne rozwiązali O. Icmei oraz S. Erenguc [1996].

T. Talbot [1982] przedstawił problem harmonogramowania projektu z ograniczonymi zasobami oraz z rozwiązaniami kompromisowymi dla zasobów i czasu (*time-resource tradeoff* – słowo *tradeoff* można rozumieć jako „coś za coś"; powiązania występujące w modelach harmonogramowania projektów mogą wywoływać pewne konflikty – poprawa jednego elementu może się wiązać z pogorszeniem innego, w tym przypadku: można wykonać projekt szybciej, ale wymaga to większego zaangażowania zasobów).

Ograniczenie kapitału w harmonogramowaniu projektu wprowadzili do modelu R. Doersch i J. Patterson [1977]. Założyli oni w modelu ograniczoną dostępność kapitału w momencie rozpoczęcia projektu. Wielkość dostępnego kapitału zmienia się w czasie w zależności od przepływów generowanych przez czynności, które zostały umieszczone w harmonogramie.

W literaturze przedmiotu spotkać można również opracowania na temat modeli harmonogramowania projektów z wieloma ograniczeniami. Modele te to najczęściej kombinacje jednokryterialnych modeli harmonogramowania projektów.

Pracę, w której model zawiera wiele ograniczeń, zaprezentowali M. Vanhoucke, E. Demeulemeester i W. Herroelen [2001]. Przedstawili oni problem maksymalizacji NPV projektu przy ograniczonych zasobach oraz ograniczonym czasie.

Problem z ograniczonymi zasobami oraz czasem przedstawili w swojej pracy M. Bartusch, R. Morhring oraz F. Readermacher [1988]. W zaprezentowanym modelu minimalizowany jest wektor składający się z czasów zakończenia poszczególnych czynności. Autorzy zaproponowali dwa typy ograniczeń – czasowe oraz zasobowe. W przypadku ograniczeń czasowych zakłada się, że czynność rozpocznie się w tzw. oknie czasowym (czas pomiędzy najwcześniejszym i najpóźniejszym możliwym rozpoczęciem czynności).

L. Bianco, P. Dell'Olmo i M. Speranza [1998] skonstruowali model z ograniczonymi zasobami oraz kapitałem. Każda czynność w projekcie może być realizowana na różne sposoby, z czym związane są określony koszty realizacji. Budżet projektu stanowi ograniczenie wyboru sposobu realizacji czynności. Dodatkowo wprowadzono ograniczenie, że czynności wykorzystujące ten sam zasób nie mogą być realizowane jednocześnie. Funkcja celu w modelu dotyczy minimalizacji czasu trwania projektu.

Powyżej przedstawione zostały modele optymalizacyjne harmonogramowania projektów, które zostały sklasyfikowane ze względu na liczbę oraz rodzaj ograniczeń. Nie ma jak dotąd opracowań, które podejmowałyby problem harmonogramowania projektu i zawierałyby wszystkie typy ograniczeń: zasobów, czasu i kosztów. Teoretycznie możliwe jest zbudowanie i rozwiązanie takiego modelu.

Powszechnie stosowane modele harmonogramowania projektów są modelami jednokryterialnymi. Niewiele opracowań dotyczących tej problematyki podejmuje problem wielokryterialności modeli optymalizujących harmonogramy.

3. Programowanie zero-jedynkowe w harmonogramowaniu projektów

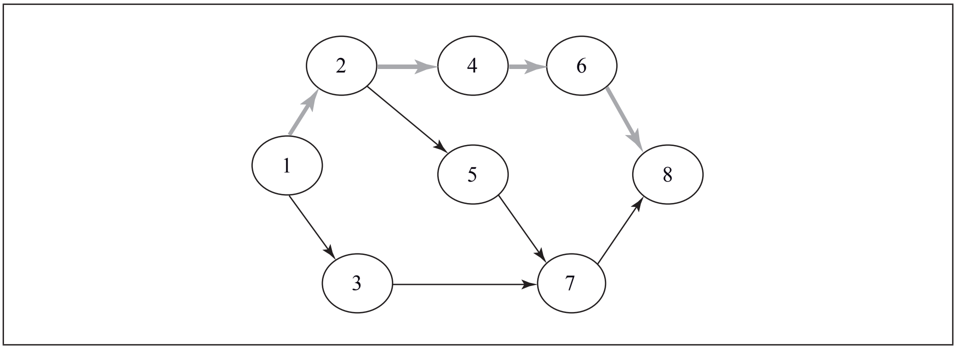
3.1. Opis problemu harmonogramowania projektu

Problem harmonogramowania czynności projektu przedstawiony w niniejszym opracowaniu można opisać w następujący sposób: należy utworzyć harmonogram projektu przez wyznaczenie czasów rozpoczęcia oraz zakończenia poszczególnych czynności, dysponując określonymi środkami przy ograniczeniach dotyczących relacji kolejnościowych oraz poziomu dostępności zasobów odnawialnych w poszczególnych jednostkach czasu.

W dalszych rozważaniach posłużono się następującym przykładem.

Przykład

Dany jest projekt składający się z 9 czynności. Projekt przedstawiony został w postaci sieci zdarzeń *Acivity on Arc* (AOA) (rys. 2). W tabeli 2 zaprezentowano czas trwania poszczególnych czynności, wymagane zasoby odnawialne (przyjęto istnienie jednego takiego zasobu) oraz przepływy pieniężne netto generowane przez czynności w poszczególnych okresach ich trwania.



Rys. 2. Sieć czynności dla przykładu

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Dane do przykładu

Czynność	Czas trwania	ES	EF	LS	LF	Zapas	Czynność krytyczna	Zasoby odnawialne	Przepływy pieniężne netto w jednostce czasu			
									$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
1–2	2	0	2	0	2	0	tak	2	–4	–4	0	0
1–3	4	0	4	1	5	1	nie	1	–3	–3	–2	–1
2–4	1	2	3	2	3	0	tak	2	–1	0	0	0
2–5	2	2	4	5	7	3	nie	3	1	1	0	0
3–7	3	4	7	5	8	1	nie	4	3	3	4	0
5–7	1	4	5	7	8	3	nie	2	5	5	6	0
4–6	4	3	7	3	7	0	tak	1	7	7	8	8
6–8	3	7	10	7	10	0	tak	3	8	9	8	0
7–8	2	7	9	8	10	1	nie	2	10	12	0	0

Oznaczenia: ES (*early start*) – najwcześniejszy moment rozpoczęcia czynności, EF (*early finish*) – najwcześniejszy moment zakończenia czynności, LS (*late start*) – najpóźniejszy moment rozpoczęcia czynności, LF (*late finish*) – najpóźniejszy moment zakończenia czynności.

Źródło: opracowanie własne.

Dla takiej sieci projektu metodą ścieżki krytycznej wyznaczone zostały najwcześniejszy oraz najpóźniejszy czas rozpoczęcia i zakończenia czynności projektu. Na tej podstawie wyznaczona została ścieżka krytyczna (rys. 3). Zgodnie z uzyskanymi wynikami projekt powinien zakończyć się po 10 jednostkach czasu. Wyniki uzyskane metodą ścieżki krytycznej porównane zostaną z wynikami uzyskanymi przez zastosowanie matematycznych modeli harmonogramowania projektów.

Dodatkowo w przykładzie przyjęto założenie, że w jednostce czasu dysponujemy 5 jednostkami zasobu odnawialnego, a czas na realizację przedsięwzięcia został ograniczony do 15 jednostek czasu.

Do budowy matematycznych modeli harmonogramowania projektów przyjęte zostały następujące założenia ogólne:

– projekt składa się z $j = 1, \ldots, J$ czynności,

– czas realizacji przedsięwzięcia jest ograniczony do T,

– $t = 0, \ldots, T$ – zbiór okresów, gdzie T – maksymalny możliwy czas realizacji projektu,

– czynności projektu umieszczone zostały w postaci sieci czynności typu AOA,

– F_j – czas zakończenia czynności j projektu,

– relacje kolejnościowe typu zakończenie–początek (S_{ij} – zbiór bezpośrednich poprzedników i czynności j),

– F_{ij} – czas zakończenia poprzednika i czynności j,

– $x_{ij} = \{0, 1\}$, $x_{ij} = 1$, gdy czynność j projektu kończy się w czasie t,

– d_j – czas trwania czynności j,

– $k = 1, \ldots, K$ – zbiór zasobów odnawialnych,

– r_{jk} – wielkość zasobu odnawialnego k wymaganego przez czynność j.

3.2. Minimalizacja czasu trwania projektu jako zadanie programowania zero-jedynkowego

Pierwszy rozpatrywany model dotyczy minimalizacji czasu trwania projektu. Przedstawione zostaną dwa modele dla tego problemu – powszechnie stosowany w literaturze oraz propozycja własna modelu mającego na celu optymalizację czasu trwania projektu.

Pierwszy z modeli można przedstawić następująco:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} t \times x_{jt} \rightarrow \min \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

$$F_j - d_j \geq F_{ij} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, i \in S_{ij}), \tag{2}$$

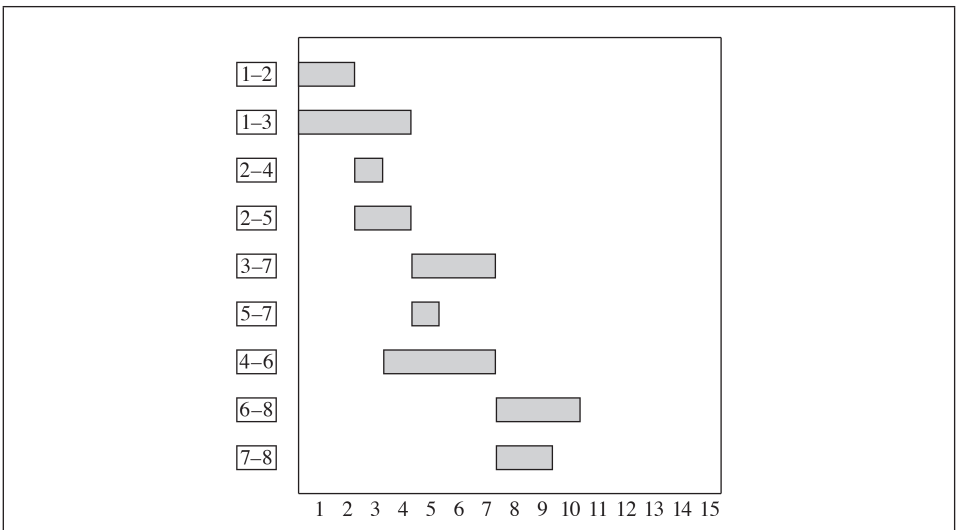
$$\sum_{j=1}^{J} r_{jk} \cdot x_{jt} \leq R_{kt} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, k = 1, \ldots, K), \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1 \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{4}$$

$$x_{jt} = \{0, 1\} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T). \tag{5}$$

W przedstawionym modelu funkcja celu (1) polega na minimalizacji sumy iloczynu jednostki czasu i zmiennej decyzyjnej [Talbot 1982]. Ponieważ zmienna decyzyjna przyjmuje wartość 1 dla jednostki czasu, w której następuje jej zakończenie, można stwierdzić, że funkcja celu to po prostu suma czasów zakończeń poszczególnych czynności. W modelu dodano: ograniczenie dotyczące relacji kolejnościowych (2), które w rozpatrywanym przykładzie są relacjami typu zakończenie–początek, ograniczenie dotyczące wykorzystania zasobów odnawialnych w poszczególnych jednostkach czasu (3) oraz ograniczenie dotyczące zmiennej decyzyjnej (4), które polega na tym, że każda czynność może zakończyć się tylko raz, a więc suma zmiennych po jednostkach czasu dla każdej czynności powinna wynosić 1. Zmienna decyzyjna przyjmuje wartości 1 lub 0 (5).

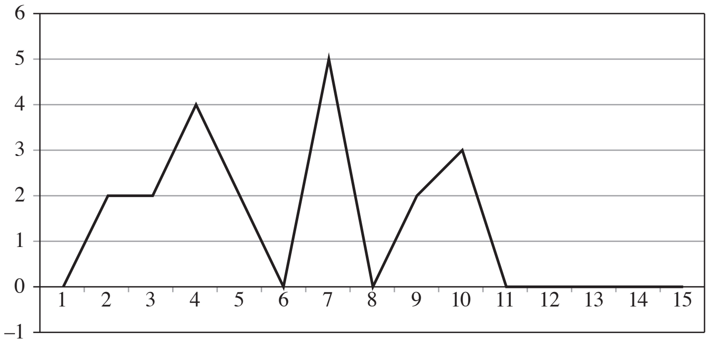
Przedstawiony powyżej model został wykorzystany do uzyskania harmonogramu dla rozpatrywanego przykładu. Rozwiązując powyższe zadanie, uzyskano następujące wyniki. Wartość funkcji celu wyniosła $z = 51$, co oznacza, że suma czasów zakończeń poszczególnych czynności projektu wynosi 51. Niestety wartość ta nie obrazuje, w jakim czasie zakończony zostanie projekt i czy zostanie on zakończony zgodnie z czasem, jaki uzyskaliśmy przez zastosowanie metody ścieżki krytycznej. Informację taką możemy uzyskać, analizując uzyskany harmonogram projektu (rys. 3).



Rys. 3. Minimalizacja czasu trwania projektu – harmonogram

Źródło: opracowanie własne.

Analiza uzyskanego harmonogramu pozwoliła na określenie momentu zakończenia projektu, który wynosi 10. Oznacza to, że harmonogram zakłada terminową realizację projektu. Rys. 4 przedstawia wykorzystanie zasobu odnawialnego w poszczególnych jednostkach czasu.



Rys. 4. Minimalizacja czasu trwania projektu – poziom wykorzystania zasobów
Źródło: opracowanie własne.

Ze względu na wskazaną wadę funkcji celu zaprezentowanego modelu zaproponowano optymalizację czasu trwania projektu jako zadania minimalizacji opóźnień projektu, co zostało zapisane w postaci następującego modelu:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}\max\left[\left\{0, t - LF_j\right\}\right]\cdot x_{jt} \to \min\ (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{6}$$

przy ograniczeniach:

$$F_j - d_j \geq F_{ij}\ (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, i \in S_{ij}), \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{J} r_{jk}\cdot x_{jt} \leq R_{kt}\ (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, k = 1, \ldots, K), \tag{8}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1\ (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{9}$$

$$x_{jt} = \left\{0, 1\right\}\ (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T). \tag{10}$$

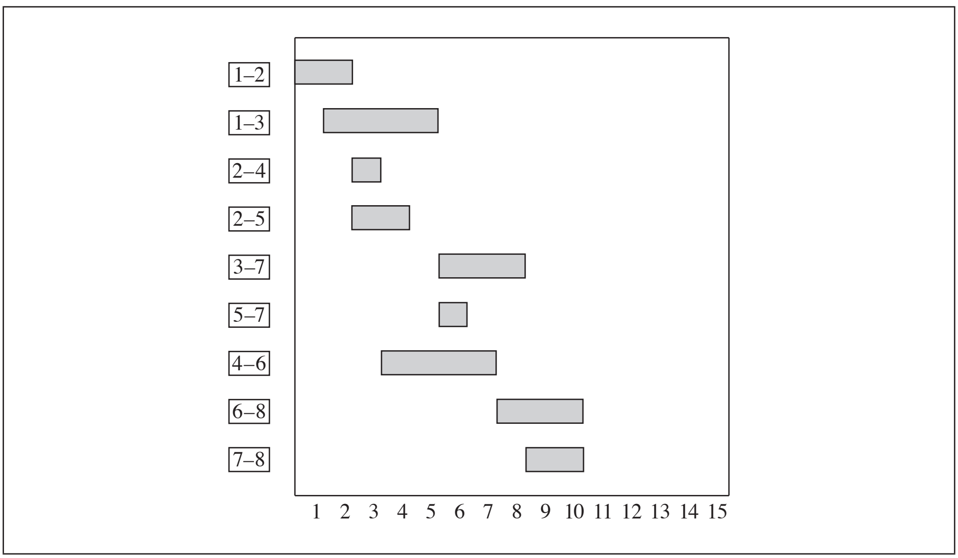
Funkcja celu (6) polega na minimalizacji opóźnień czynności projektu. Opóźnienie zostało określone jako różnica pomiędzy faktycznym czasem zakończenia czynności a najpóźniejszym czasem zakończenia czynności uzyskanym przez zastosowanie metody ścieżki krytycznej. Model ma ograniczenia (7)–(10), jak model poprzedni.

Po podstawieniu danych z przykładu funkcja celu ma następującą postać:

$$x_{13}+2x_{14}+x_{34}+3x_{15}+2x_{35}+4x_{16}+x_{26}+3x_{36}+5x_{17}+2x_{27}+4x_{37}+$$
$$6x_{18}+3x_{28}+5x_{38}+x_{48}+x_{78}+7x_{19}+4x_{29}+6x_{39}+2x_{49}+x_{59}+x_{69}+2x_{79}+$$
$$8x_{110}+5x_{210}+7x_{310}+3x_{410}+2x_{510}+2x_{610}+3x_{710}+$$
$$9x_{111}+6x_{211}+8x_{311}+4x_{411}+3x_{511}+3x_{611}+4x_{711}+x_{811}+x_{911}+$$
$$10x_{112}+7x_{212}+9x_{312}+5x_{412}+4x_{512}+4x_{612}+5x_{712}+2x_{812}+2x_{912}+$$
$$11x_{113}+8x_{213}+10x_{313}+6x_{413}+5x_{513}+5x_{613}+6x_{713}+3x_{813}+3x_{913}+$$
$$12x_{114}+9x_{214}+11x_{314}+7x_{414}+6x_{514}+6x_{614}+7x_{714}+4x_{814}+4x_{914}+$$
$$13x_{115}+10x_{215}+12x_{315}+8x_{415}+7x_{515}+7x_{615}+8x_{715}+5x_{815}+5x_{915}\rightarrow \min$$

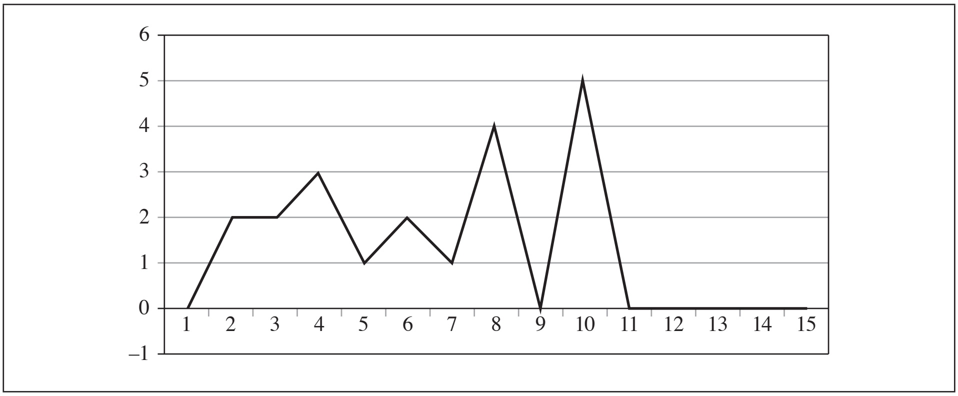
Analizując powyższą postać funkcji celu, można wywnioskować, że jeżeli zmienna x_{13} przyjmie wartość 1, co będzie oznaczało, że czynność pierwsza zakończy się w trzeciej jednostce czasu, odnotujemy opóźnienie na poziomie jednej jednostki czasu. Analogicznie jeżeli zmienna x_{14} przyjmie wartość 1, co będzie oznaczało, że czynność pierwsza zakończy się w czwartej jednostce czasu, wówczas odnotujemy opóźnienie na poziomie dwóch jednostek czasu.

Przedstawiony model optymalizujący czas trwania projektu przez minimalizację opóźnień projektu został wykorzystany do uzyskania harmonogramu dla omawianego przykładu.



Rys. 5. Minimalizacja opóźnień projektu – harmonogram

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Minimalizacja opóźnień projektu – poziom wykorzystania zasobów
Źródło: opracowanie własne.

Rozwiązując powyższe zadanie, uzyskano następujące wyniki. Wartość funkcji celu wyniosła $z = 0$. Taka wartość funkcji celu bezpośrednio informuje, że projekt realizowany jest terminowo w stosunku do czasu uzyskanego przy zastosowaniu metody ścieżki krytycznej, co można potwierdzić, analizując uzyskany harmonogram (rys. 5). W przypadku zastosowania funkcji kryterium, mającej na celu minimalizację sumy czasów zakończeń, poszczególne czynności harmonogramowane są zgodnie z najwcześniejszymi czasami rozpoczęcia i zakończenia uzyskanymi przez zastosowanie metody ścieżki krytycznej, podczas gdy zastosowanie zaproponowanej postaci funkcji celu prowadzi do umieszczenia czynności w harmonogramie zgodnie z najpóźniejszymi czasami rozpoczęcia i zakończenia ze ścieżki krytycznej. Rys. 6 przedstawia wykorzystanie zasobu odnawialnego w poszczególnych jednostkach czasu.

3.3. Minimalizacja poziomu wykorzystania zasobów odnawialnych jako zadanie programowania zero-jedynkowego

Kolejne zadanie jest związane z problemem optymalizacji poziomu wykorzystania zasobów. Problem ten nie jest często podejmowany w literaturze, a jego rozwiązanie polega zazwyczaj na minimalizacji odchyleń pomiędzy poziomem zasobów dostępnych a poziomem zasobów wykorzystanych [Viana i de Sousa 2000].

W niniejszym opracowaniu optymalizacja wykorzystania zasobów w projekcie polega na minimalizacji poziomu wykorzystania zasobów w poszczególnych jednostkach czasu, a problem ten zapisany może być w następujący sposób:

$$\max_{t=1,\ldots,T}\left[\sum_{j=1}^{J} r_{jk}\cdot x_{jt}\right]\rightarrow \min\ (j=1,\ldots,J,\ t=1,\ldots,T,\ k=1,\ldots,K), \qquad (11)$$

przy ograniczeniach:

$$F_j - d_j \geq F_{ij} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, i \in S_{ij}), \tag{12}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1 \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{13}$$

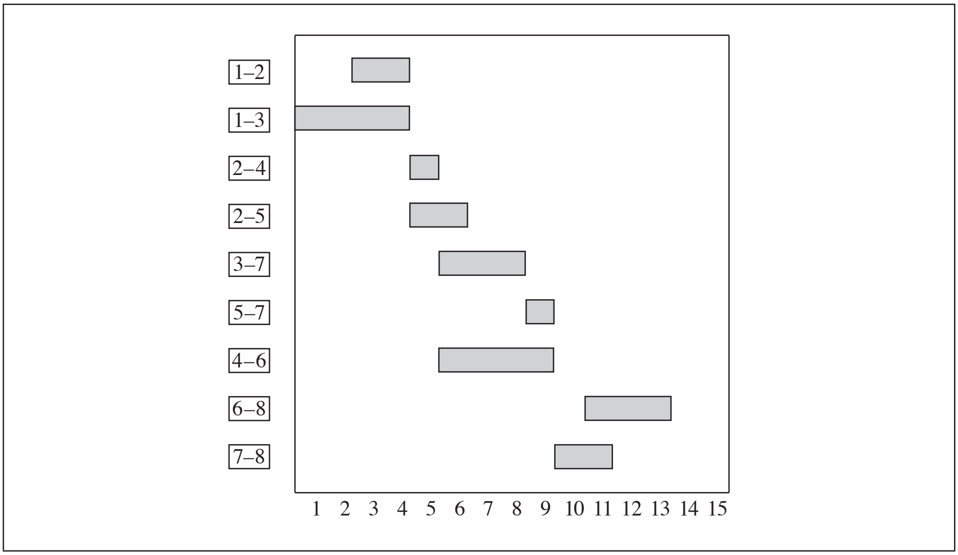
$$x_{jt} = \{0,1\} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T). \tag{14}$$

Funkcja kryterium (11) ma na celu minimalizację poziomu wykorzystania zasobów odnawialnych w poszczególnych jednostkach czasu. Ograniczenia (12)–(14) są takie same jak w poprzednich modelach. Ograniczenie dotyczące dostępności zasobów odnawialnych w poszczególnych jednostkach czasu w modelach optymalizujących poziom wykorzystania zasobów jest pomijane.

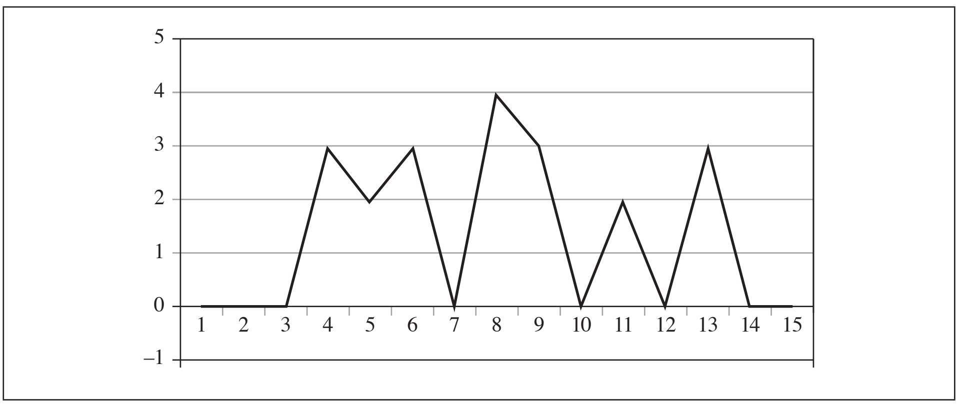
$$\begin{gathered}
\text{Max}\{(2x_{11}+x_{21}+2x_{31}+3x_{41}+4x_{51}+2x_{61}+x_{71}+3x_{81}+2x_{91}),\\
(2x_{12}+x_{22}+2x_{32}+3x_{42}+4x_{52}+2x_{62}+x_{72}+3x_{82}+2x_{92}),\\
(2x_{13}+x_{23}+2x_{33}+3x_{43}+4x_{53}+2x_{63}+x_{73}+3x_{83}+2x_{93}),\\
(2x_{14}+x_{24}+2x_{34}+3x_{44}+4x_{54}+2x_{64}+x_{74}+3x_{84}+2x_{94}),\\
(2x_{15}+x_{25}+2x_{35}+3x_{45}+4x_{55}+2x_{65}+x_{75}+3x_{85}+2x_{95}),\\
(2x_{16}+x_{26}+2x_{36}+3x_{46}+4x_{56}+2x_{66}+x_{76}+3x_{86}+2x_{96}),\\
(2x_{17}+x_{27}+2x_{37}+3x_{47}+4x_{57}+2x_{67}+x_{77}+3x_{87}+2x_{97}),\\
(2x_{18}+x_{28}+2x_{38}+3x_{48}+4x_{58}+2x_{68}+x_{78}+3x_{88}+2x_{98}),\\
(2x_{19}+x_{29}+2x_{39}+3x_{49}+4x_{59}+2x_{69}+x_{79}+3x_{89}+2x_{99}),\\
(2x_{110}+x_{210}+2x_{310}+3x_{410}+4x_{510}+2x_{610}+x_{710}+3x_{810}+2x_{910}),\\
(2x_{111}+x_{211}+2x_{311}+3x_{411}+4x_{511}+2x_{611}+x_{711}+3x_{811}+2x_{911}),\\
(2x_{112}+x_{212}+2x_{312}+3x_{412}+4x_{512}+2x_{612}+x_{712}+3x_{812}+2x_{912}),\\
(2x_{113}+x_{213}+2x_{313}+3x_{413}+4x_{513}+2x_{613}+x_{713}+3x_{813}+2x_{913}),\\
(2x_{114}+x_{214}+2x_{314}+3x_{414}+4x_{514}+2x_{614}+x_{714}+3x_{814}+2x_{914}),\\
(2x_{115}+x_{215}+2x_{315}+3x_{415}+4x_{515}+2x_{615}+x_{715}+3x_{815}+2x_{915})\}\rightarrow\text{min}
\end{gathered}$$

Rozwiązując powyższe zadanie, uzyskano następujące wyniki. Wartość funkcji celu wyniosła $z = 4$. Oznacza to, że maksymalny poziom wykorzystania zasobów odnawialnych w jednostce czasu wynosi 4, co potwierdza rys. 8. Analizując uzyskany harmonogram (rys. 7), możemy zauważyć, że obniżenie poziomu wykorzystania zasobów z 5 (takie ograniczenie nałożone było na poprzednie modele) do 4, jakie uzyskano przez rozwiązanie przedstawionego modelu matematycznego, pociąga za sobą wydłużenie czasu trwania projektu.

W aktualnym harmonogramie projekt kończy się po 13 jednostkach czasu, co oznacza, że jest on opóźniony o 3 jednostki czasu w stosunku do czasu zakończenia projektu, jaki uzyskano za pomocą metody ścieżki krytycznej.



Rys. 7. Minimalizacja poziomu wykorzystania zasobów – harmonogram
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Minimalizacja poziomu wykorzystania zasobów – poziom wykorzystania zasobów
Źródło: opracowanie własne.

3.4. Maksymalizacja zdyskontowanych przepływów pieniężnych w projekcie jako zadanie programowania zero-jedynkowego

Kierunki optymalizacji w modelach harmonogramowania projektów oprócz czasu i zasobów mogą dotyczyć również przepływów pieniężnych generowanych przez czynności projektu. Problem optymalizacji przepływów pieniężnych w problemie harmonogramowania projektu może być przedstawiony w postaci następującego modelu [Icmeli i Erenguc 1996]:

$$\sum_{i=1}^{J}\left[\sum_{t=1}^{d_j}\left[cf_{jt}\cdot e^{\alpha(d_j-t)}\right]\cdot e^{-\alpha F_j}\right]\to \max \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{15}$$

przy ograniczeniach:

$$F_j - d_j \geq F_{ij} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, i \in S_{ij}), \tag{16}$$

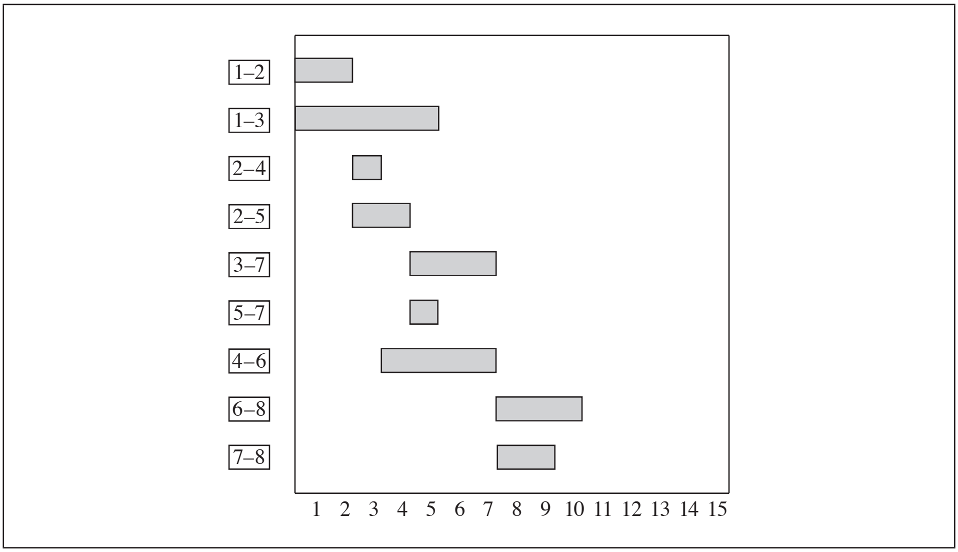
$$\sum_{j=1}^{J} r_{jk}\cdot x_{jt} \leq R_{kt} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, k = 1, \ldots, K), \tag{17}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1 \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{18}$$

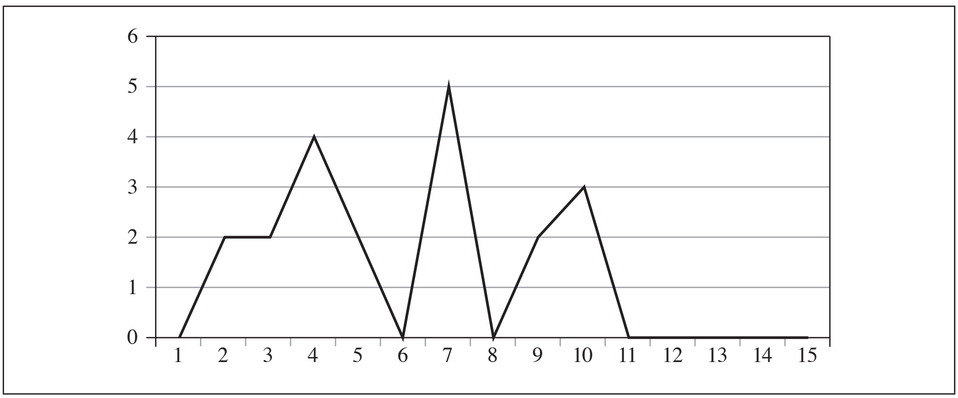
$$x_{jt} = \{0, 1\} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T). \tag{19}$$

W funkcji celu (15) maksymalizowane są zdyskontowane przepływy pieniężne generowane przez poszczególne czynności projektu. Przepływy te są zależne od czasu trwania czynności oraz momentu jej zakończenia. Ograniczenia (16)–(19) są takie jak w poprzednich modelach.

Przedstawiony powyżej model posłużył do rozwiązania przykładu. Uzyskano następujące wyniki. Wartość funkcji celu wyniosła z = 38,1, co oznacza sumę zdyskontowanych przepływów pieniężnych poszczególnych czynności na zakończeniu projektu. Projekt kończy się po 10 jednostkach czasu, a więc zgodnie z czasem wyznaczonym za pomocą metody ścieżki krytycznej, co widoczne jest na harmonogramie projektu (rys. 9), przy czym czynności umieszczone zostały na harmonogramie w najwcześniejszych czasach rozpoczęcia i zakończenia (zgodnie z czasami z CPM). Wykorzystanie zasobów nie przekroczyło założonego w przykładzie poziomu 5 jednostek (rys. 10).



Rys. 9. Maksymalizacja zdyskontowanych przepływów pieniężnych – harmonogram
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Maksymalizacja zdyskontowanych przepływów pieniężnych – poziom wykorzystania zasobów
Źródło: opracowanie własne.

3.5. Wielokryterialne harmonogramowanie projektów jako zadanie programowania zero-jedynkowego

Jak dowiedziono powyżej, możliwe jest budowanie modeli matematycznych harmonogramowania projektów, w których optymalizacji podlegają takie czynniki, jak: czas trwania projektu, poziom wykorzystania zasobów czy zdyskontowane przepływy pieniężne. Ponieważ w praktyce często zdarza się, że istotne jest ustalenie harmonogramu optymalnego nie tylko ze względu na jeden czynnik, warto rozważyć połączenie wskazanych wcześniej modeli w celu zbudowania wielokryterialnego modelu harmonogramowania projektów. Taki model będzie miał wówczas następującą postać:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} \max\left[\{0, t - LF_j\}\right] \cdot x_{jt} \rightarrow \min \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{20}$$

$$\max_{t=1,\ldots,T}\left[\sum_{j=1}^{J} r_{jk}^{r} \cdot x_{jt}\right] \rightarrow \min \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, k = 1, \ldots, K), \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{J}\left[\sum_{t=1}^{d_j}\left[cf_{jt} \cdot e^{\alpha(d_j - t)}\right] \cdot e^{-\alpha F_j}\right] \rightarrow \max \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{22}$$

przy ograniczeniach:

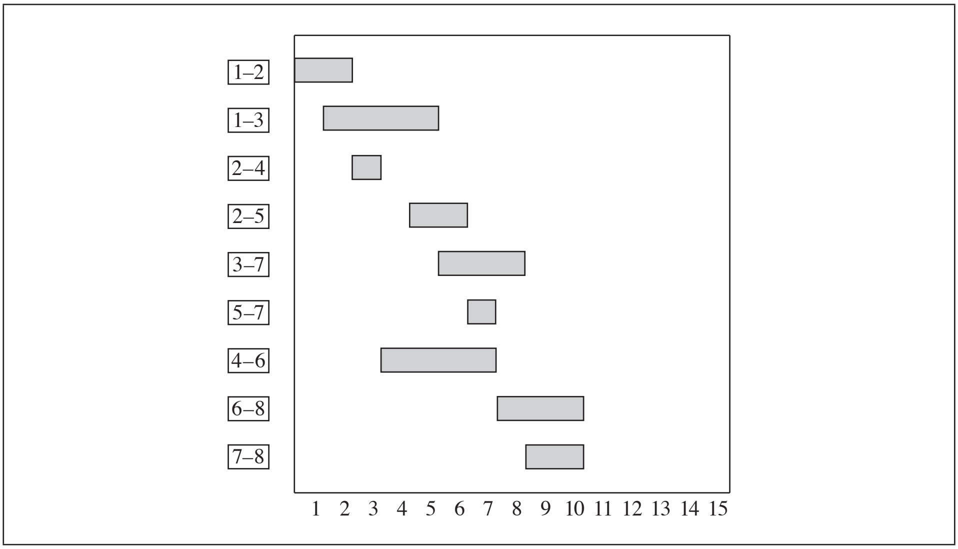
$$F_j - d_j \geq F_{ij} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, i \in S_{ij}), \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{J} r_{jk} \cdot x_{jt} \leq R_{kt} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T, k = 1, \ldots, K), \tag{24}$$

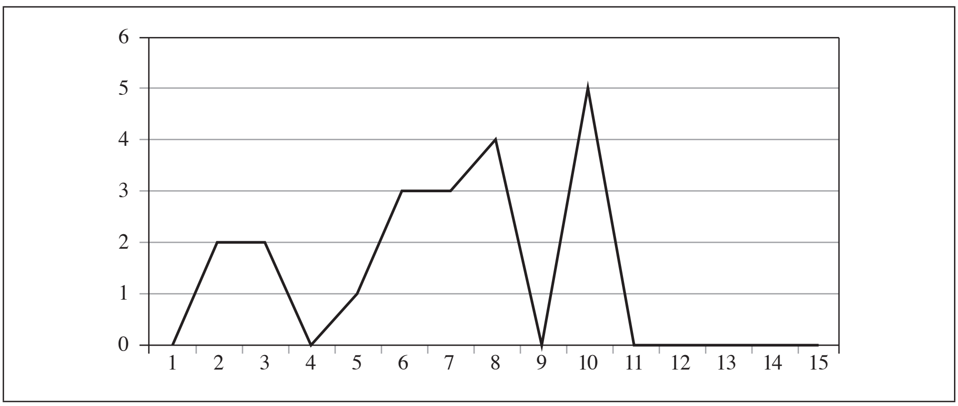
$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1 \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T), \tag{25}$$

$$x_{jt} = \{0, 1\} \; (j = 1, \ldots, J, t = 1, \ldots, T). \tag{26}$$

Powyższy model wielokryterialny posłużył do rozwiązania przykładu. Dla uproszczenia jako metodę rozwiązania problemu wykorzystano metodę agregacji funkcji celu. Wynika to z faktu, że zastosowane funkcje celu są nieliniowe, co uniemożliwia zastosowanie klasycznych metod rozwiązywania problemów wielokryterialnych. Przyjęto następujące wagi dla poszczególnych funkcji kryterium: 40% dla optymalizacji czasu trwania projektu, 40% dla optymalizacji poziomu wykorzystania zasobów oraz 20% dla optymalizacji przepływów pieniężnych. Uzyskano harmonogram, w którym projekt kończy się po 10 jednostkach czasu (rys. 11), a poziom wykorzystania zasobów nie przekroczył zakładanego poziomu 5 jednostek (rys. 12).



Rys. 11. Wielokryterialne harmonogramowanie projektu – harmonogram
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Wielokryterialne harmonogramowanie projektów – poziom wykorzystania zasobów
Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

Zastosowanie metod optymalizacyjnych umożliwia stworzenie harmonogramów projektów optymalnych nie tylko ze względu na czas, ale również zasoby czy wskaźniki finansowe.

W niniejszej pracy przedstawione zostały modele optymalizacji harmonogramów projektów wykorzystujące zmienną zero-jedynkową. Głównymi zaletami przedstawionego podejścia są jego prostota oraz łatwość zastosowania w wielu metodach optymalizacyjnych ze względu na zero-jedynkową postać zmiennej. Wadą przedstawionego modelu jest liczba zmiennych, która wynosi $j \times p \times t$. Wraz ze wzrostem liczby czynności czy horyzontu planowania projektu liczba zmiennych będzie wzrastać wykładniczo, co może utrudniać rozwiązanie większych problemów.

Dzięki binarnej postaci zmiennej decyzyjnej możliwe jest zastosowanie algorytmów genetycznych do rozwiązania wielokryterialnego problemu harmonogramowania projektów. Ponieważ problem ten jest problemem NP-trudnym, zastosowanie tych algorytmów jest zasadne. Będzie ono celem dalszych badań w tym zakresie.

W dalszych badaniach rozważona powinna zostać również możliwość zastosowania sieci deterministycznej stopnia pierwszego *Activity on Node*, będącej acyklicznym grafem skierowanym $G = (W, K)$, w którym W to zbiór wierzchołków reprezentujących czynności, a K to zbiór łuków prezentujących relacje kolejnościowe. Sieć ta, zwana także siecią czynności, umożliwia zastosowanie nie tylko relacji kolejnościowych typu zakończenie–początek, ale także relacji typu: zakończenie–zakończenie, rozpoczęcie–rozpoczęcie czy rozpoczęcie–zakończenie.

Literatura

Bartusch M., Mohring R., Radermacher F. [1988], *Scheduling Project Networks with Resource Constraints and Time Windows*, „Annals of Operations Research”, vol. 16, nr 1–4.

Bianco L., Dell’Olmo P., Speranza M. [1998], *Heuristics for Multimode Scheduling Problem with Dedicated Resources*, „European Journal of Operational Research”, vol. 107.

Brandenburg H. [2002], *Zarządzanie projektami*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.

Doersch R., Patterson J. [1977], *Scheduling a Project to Maximize Its Present Value: A Zero-one Programming Approach*, „Management Science”, vol. 23, nr 8.

Icmeli O., Erenguc S. [1996], *A Branch and Bound Procedure for the Resource Constrained Project Scheduling Problem with Discounted Cash Flows*, „Management Science”, vol. 42, nr 10.

Kostrubiec A. [2003], *Harmonogramowanie projektów – przegląd modeli* [w:] *Inżynieria zarządzania przedsięwzięciami*, red. L. Zawadzka, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk.

Norberciak M. [2002], *Przegląd metod automatycznego planowania – przykład wykorzystania algorytmu genetycznego w rozwiązaniu prostego problemu planowania*, Prace Naukowe Wydziałowego Zakładu Informatyki Politechniki Wrocławskiej, z. 1: Sztuczna inteligencja, Wrocław.

Russell R. [1970], *Cash Flows in Networks*, „Management Science", vol. 16, nr 5.

Shouman M. i in. [2006], *Genetic Algorithm Constraint Project Scheduling*, „Alexandria Engineering Journal", vol. 45, nr 3.

Talbot T. [1982], *Resource-constrained Project Scheduling with Time-resource Tradeoffs: The Non-preemptive*, „Management Science", vol. 28, nr 10.

Vanhoucke M., Demeulemeester E., Herroelen W. [2001], *On Maximizing the Net Present Value of a Project under Renewable Resource Constraints*, „Management Science", vol. 47, nr 8.

Viana A., de Sousa J. [2000], *Using Metaheuristic in Multiobjective Resource Constrained Project Scheduling*, „European Journal of Operational Research", vol. 120, nr 20.

Using the Zero-one Programming Approach in Project Scheduling

Because of increasing interest in project management in the subject literature, optimisation techniques are often considered in project planning and scheduling. The main project scheduling techniques are CPM or PERT. Those methods deliver schedules with optimal project finish times and ensure the level of resource usage is controlled. In practical situations, project schedules should be optimised not only because of time but also because of resource usage and cash flows. The above techniques do not meet those requirements.

The purpose of this paper is to demonstrate how zero-one programming can be used in project scheduling. Zero-one programming is a special case of integer programming where all the decision variables are integers and can assume values of either zero or one. A zero-one programming formulation has been applied to solve three project scheduling problems, namely the optimisation of project completion time, resource usage and project cash flows.

Keywords: project scheduling, zero-one programming, schedule optimisation, multiple criteria optimisation.