

Paweł Cabała

Katedra Procesu Zarządzania

Wykorzystanie metod ELECTRE w projektowaniu złożonych systemów organizacyjnych*

Streszczenie

Artykuł ma na celu zwrócenie uwagi na możliwości efektywnego wykorzystania bardziej sformalizowanych podejść do diagnozy i projektowania systemów zarządzania przedsiębiorstwem w warunkach niekompletnych i nieprecyzyjnych informacji. Na początku został omówiony wielokryterialny system oceny, w którym preferencje decydenta są modelowane na podstawie relacji przewyższania. Wykorzystanie binarnej relacji przewyższania jest charakterystyczne dla grupy metod ELECTRE obejmującej zestaw procedur analitycznych wspomagających rozwiązywanie zagadnień wyboru, kategoryzacji oraz rangowania wariantów decyzyjnych. W artykule zdefiniowane zostały podstawowe relacje preferencji i progi dyskryminacji (równoważności, preferencji, weta). Wyjaśniono także pojęcia zgodności oraz braku niezgodności, pozwalające weryfikować hipotezę o istnieniu relacji przewyższania między parami wariantów decyzyjnych ze względu na dobrane kryteria oceny. W dalszej części artykułu pokazano, w jaki sposób można wykorzystać wprowadzone pojęcia w podejmowaniu decyzji. Omówiono przy tym metodę ELECTRE I wraz z przykładem szczegółowo ilustrującym proces agregacji ocen cząstkowych i ustalania globalnych relacji przewyższania. Przedstawiono także metodę wyznaczania wag kryteriów oceny zalecaną w metodach ELECTRE. Opisany sposób wyznaczania wag może być z powodzeniem stosowany w innych podejściach do rozwiązywania złożonych problemów decyzyjnych.

Słowa kluczowe: wielokryterialne podejmowanie decyzji, relacja przewyższania, wagi kryteriów, analiza preferencji.

* Artykuł został przygotowany w ramach projektu badawczego, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, nr 2011/03/B/HS4/03585.

1. Wprowadzenie

Projektowanie to proces, którego celem jest identyfikacja elementów systemu, określenie ich funkcji oraz ustanowienie powiązań między nimi w sposób umożliwiający efektywną adaptację systemu do otoczenia. Ważnym etapem projektowania jest ocena i wybór optymalnego (racjonalnego) wariantu projektu. Specyfika i niepowtarzalność każdego systemu organizacyjnego sprawiają, że dobór odpowiednich kryteriów oceny wariantów jest uzależniony od uwarunkowań sytuacyjnych. W procesie projektowania szczególnie złożonych systemów organizacyjnych (niezależnie od specyfiki przedmiotu projektowania) zaleca się wykorzystanie podejścia wielokryterialnego.

W podejściu wielokryterialnym istotne znaczenie ma dobór właściwych kryteriów oceny. Dobór taki powinien odbywać się poprzez rozpoznanie rozległego spektrum cech badanego systemu. Postuluje się, aby zbiór cech będących rezultatem takiego rozpoznania był wyczerpujący, wierny oraz zupełny [Lichtarski 1982, s. 29]. Zbiór cech systemu jest wyczerpujący, jeżeli uwzględni wszystkie istotne aspekty jego funkcjonowania, wierny – jeżeli odwzorowuje realne problemy, usystematyzowany – gdy cechy są właściwie uporządkowane. Dobrane cechy systemu stanowią podstawę definiowania kryteriów oceny, które wykorzystuje się następnie w procesie wyboru wariantu projektu. Istnieje pokaźna grupa metod opisujących, w jaki sposób wybrać najlepszy wariant przy zastosowaniu jednocześnie wielu kryteriów wyboru. Wśród nich ważne miejsce zajmują metody ELECTRE.

Metody ELECTRE stosowane są w przypadkach szczególnie złożonych sytuacji decyzyjnych. Metody te wymagają zastosowania co najmniej trzech, a w praktyce najczęściej pięciu lub więcej kryteriów oceny. Są użyteczne zwłaszcza w sytuacjach, gdy zbiór dobranych kryteriów ma charakter heterogeniczny, tzn. gdy brane pod uwagę cechy systemu różnią się istotnie między sobą (np. hałas, estetyka, prędkość, funkcjonalność, koszt eksploatacji). Z uwagi na niepełne informacje i trudności z pomiarem, działania (warianty decyzyjne) są oceniane na skali porządkowej lub słabej skali interwałowej. W procesie agregacji ocen nie dopuszcza się kompensacji niskich not wystawionych na podstawie jednego kryterium przez wysokie noty wystawione na podstawie innych kryteriów. Warunek ten odróżnia metody ELECTRE od klasycznych metod wielokryterialnego podejmowania decyzji opartych na teorii użyteczności wieloatrybutowej, w których określa się postać analityczną funkcji użyteczności i wybiera ten wariant decyzyjny, dla którego funkcja użyteczności przyjmuje wartość maksymalną.

Początki koncepcji obejmującej grupę metod nazywanych w skrócie ELECTRE, sięgają połowy lat 60. ubiegłego wieku¹. W ciągu ostatnich dziesięcioleci koncepcja ta stała się podstawą licznych publikacji związanych z zagadnieniem wielokryterialnego wspomaganie decyzji². Opracowane zostały kolejne wersje metody, tj. ELECTRE: I, Iv, IS, II, III, IV, TRI i in., dlatego mówi się o metodach ELECTRE. Rozwój tych metod nie sprowadzał się tylko do modyfikacji wcześniejszych propozycji, lecz zmierzał do wypracowania procedur rozwiązywania różnych problemów wielokryterialnego wspomaganie decyzji [Roy 1990, s. 67–80]: zagadnienia wyboru (wyznaczenie możliwie najmniej licznego podzbioru wariantów decyzyjnych z uwagi na przyjęte kryteria), zagadnienia sortowania (przyporządkowywanie wariantów do z góry określonych kategorii), zagadnienia porządkowania wariantów (szeregowanie wariantów według malejącej preferencji) oraz zagadnienia opisu wariantów (systematyczne i sformalizowane definiowanie problemu decyzyjnego).

W niniejszym artykule omówiono istotę metod ELECTRE. Wyjaśnione zostały podstawowe pojęcia stosowane w tych metodach, tj. relacja przewyższania, progi dyskryminacji (równoważności, preferencji oraz weta), a także definicje zgodności i braku niezgodności. Zwrócono także uwagę na problematykę agregacji ocen cząstkowych, którą opisano na przykładzie metody ELECTRE I. Ponadto przedstawiono technikę wyznaczania wag kryteriów oceny, która jest zalecana dla tej rodziny metod.

Artykuł ma na celu zwrócenie uwagi na możliwości wykorzystania wielokryterialnych systemów oceny w rozwijaniu bardziej sformalizowanych metodyk diagnostyczno-projektowych w zarządzaniu organizacjami.

2. Modelowanie preferencji

W klasycznej teorii podejmowania decyzji przyjmuje się, że efektem porównania wariantów działania ze względu na przyjęte kryterium oceny jest relacja preferencji lub relacja indyferencji. Konsekwencją takiego założenia jest uznanie, że decydent jest w stanie zawsze jednoznacznie stwierdzić, czy przedkłada jeden wariant nad drugi (preferencja), czy też wybór między nimi jest obojętny (indyferencja). Jednak w wielu sytuacjach praktycznych posiadane informacje są nieprecyzyjne, niekompletne i mają charakter subiektywny. Dopuszczenie tylko tych

¹ Nazwa ELECTRE jest akronimem francuskiego określenia ELimination Et Choix Tra-
duisant la REalité.

² Zestawienie ważniejszych publikacji dotyczących metod ELECTRE można znaleźć w pracy [Multiple Criteria Decision..., 2005, s. 153–162].

dwóch wykluczających się relacji może być w takich przypadkach nadmiernym uproszczeniem.

W metodach ELECTRE przyjmuje się aksjomat ograniczonej porównywalności, którego wyrazem jest uznanie czterech podstawowych relacji: I – równoważności, P – silnej preferencji, Q – słabej preferencji oraz R – nieporównywalności. W sytuacji silnej preferencji (P) decydent jest przekonany, że różnica oceny efektów (konsekwencji) wdrożenia dwóch wariantów ze względu na określone kryterium wyraźnie przemawia na korzyść jednego wariantu. Słaba preferencja Q dotyczy takich różnic między wartościami ocen wariantów, które powodują, że decydent waha się między uznaniem równoważności (I) i silnej preferencji (Q). Sytuacja nieporównywalności odpowiada brakowi wyraźnych przesłanek uzasadniających istnienie relacji równoważności lub preferencji między wariantami [Roy 1990, s. 93].

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_m\}$ – zbiór wariantów decyzyjnych (możliwych działań),

$F = \{g_1, \dots, g_j, \dots, g_n\}$ – zbiór kryteriów oceny ($n \geq 3$),

$g_j(a_i)$ – ocena (wynik pomiaru realizacji) i -tego wariantu ze względu na j -te kryterium.

Preferencje w metodach ELECTRE są modelowane za pomocą binarnej relacji przewyższania (*outranking*). Relacja przewyższania S wskazuje, że i -ty wariant jest „co najmniej tak dobry jak” k -ty wariant ze względu na j -te kryterium, co zapisujemy. Relacja przewyższania obejmuje łącznie sytuacje równoważności, słabej oraz silnej preferencji ($S = I \cup Q \cup P$).

Porównanie dowolnej pary wariantów decyzyjnych $(a_i, a_k) \in A \times A$ prowadzi do czterech przypadków [Figueira *et al.* 2010, s. 58]:

- 1) $a_i S_j a_k \wedge a_k S_j a_i \rightarrow a_i I_j a_k$ (warianty a_i i a_k są równoważne),
- 2) $a_i S_j a_k \wedge \neg a_k S_j a_i \rightarrow a_i P_j a_k$ (wariant a_i jest preferowany nad a_k),
- 3) $\neg a_i S_j a_k \wedge a_k S_j a_i \rightarrow a_k P_j a_i$ (wariant a_k jest preferowany nad a_i),
- 4) $\neg a_i S_j a_k \wedge \neg a_k S_j a_i \rightarrow a_i R_j a_k$ (warianty a_i i a_k są nieporównywalne).

W celu ścisłego rozróżnienia między sytuacjami równoważności słabej i mocnej preferencji wprowadza się progi dyskryminacji:

– próg równoważności $q_j[g_j(a_i)]$: wyraża maksymalną różnicę wartości ocen par wariantów $g_j(a_k) - g_j(a_i)$, która doprowadza do uznania równoważności (indiferencji) między dwoma wariantami ze względu na kryterium g_j ,

– próg preferencji $p_j[g_j(a_i)]$: wyraża minimalną różnicę między wartościami ocen par wariantów $g_j(a_k) - g_j(a_i)$, która pozwala stwierdzić, że jeden wariant jest wyraźnie lepszy od drugiego wariantu (preferencja silna).

Rozważmy uporządkowane pary wariantów decyzyjnych $(a_i, a_k) \in A \times A$, które oceniane są względem kryterium g_j . Wartości progów równoważności $q_j[g_j(a_i)]$ i preferencji $p_j[g_j(a_i)]$ pozwalają jednoznacznie określić sytuacje równoważności

(I), słabej (Q) oraz mocnej (P) preferencji³. Dla wszystkich wariantów decyzyjnych uporządkowanych w ten sposób, że $g_j(a_i) \geq g_j(a_k)$ zachodzą następujące zależności:

$$-q_j[g_j(a_i)] \leq g_j(a_i) - g_j(a_k) \leq q_j[g_j(a_k)] \Leftrightarrow a_i I_j a_k,$$

$$q_j[g_j(a_k)] < g_j(a_i) - g_j(a_k) \leq p_j[g_j(a_k)] \Leftrightarrow a_i Q_j a_k,$$

$$g_j(a_i) - g_j(a_k) > p_j[g_j(a_k)] \Leftrightarrow a_i P_j a_k.$$

Jako ilustrację powyższych zależności przyjmijmy zbiór czterech wariantów decyzyjnych o następujących wartościach funkcji kryterium g_j :

$$g_j(a_1) = 34, \quad g_j(a_2) = 23, \quad g_j(a_3) = 41, \quad g_j(a_4) = 29,$$

dla których ustalono stałe proggi równoważności i preferencji: $q_j[g_j(a_k)] = 5$ oraz $p_j[g_j(a_k)] = 11$. Wyniki porównań wszystkich par wariantów pokazano w tabeli 1.

Tabela 1. Przykład zastosowania progów równoważności i preferencji

a) różnice wartości ocen

	a_3	a_1	a_4	a_2
a_3	0	7	12	18
a_1		0	5	11
a_4			0	6
a_2				0

b) relacje podstawowe

	a_3	a_1	a_4	a_2
a_3	$a_3 I_j a_3$	$a_3 Q_j a_1$	$a_3 P_j a_4$	$a_3 P_j a_2$
a_1		$a_1 I_j a_1$	$a_1 I_j a_4$	$a_1 Q_j a_2$
a_4			$a_4 I_j a_4$	$a_4 Q_j a_2$
a_2				$a_2 I_j a_2$

Źródło: opracowanie własne.

Funkcja g_j może pełnić rolę kryterium, jeżeli $g_j(a_i) \geq g_j(a_k) \rightarrow a_i S_j a_k$ dla wszystkich par wariantów decyzyjnych. Z tzw. kryterium „prawdziwym” mamy do czynienia, gdy proggi preferencji i równoważności są równe zero:

$$q_j[g_j(a_k)] = p_j[g_j(a_k)] = 0. \quad (1)$$

Kryterium prawdziwe oznacza, że różnica między wartościami ocen dwóch wariantów $g_j(a_i) - g_j(a_k) \neq 0$ traktowana jest jako sytuacja preferencji, a sytuacji indyferencji odpowiada $g_j(a_i) - g_j(a_k) = 0$. Gdy zostały przyjęte określone wartości (większe od zera) progów preferencji i równoważności, to mamy do czynienia z tzw. pseudokryterium, które uwzględnia nieprecyzyjne informacje na

³ Progi równoważności i preferencji mogą być stałe (niezależne od wartości funkcji kryterium dla wszystkich wariantów lub zmienne. Rozwinięcie tego zagadnienia można znaleźć w pracy [Rogers i Bruen 1998].

temat ocen konsekwencji realizacji wariantów decyzyjnych – w tym przypadek słabej preferencji, gdy $q_j[g_j(a_k)] \neq p_j[g_j(a_k)]$.

3. Proces agregacji ocen

Wielokryterialne wspomaganie decyzji wiąże się z koniecznością przeprowadzenia agregacji ocen. Poniżej opisana zostanie procedura wyznaczania globalnej relacji przewyższania według metody ELECTRE I. Metoda ta nie uwzględnia progów równoważności i preferencji, czyli zakłada, że wszystkie kryteria są zdefiniowane jako kryteria prawdziwe.

Konstrukcja globalnej relacji przewyższania opiera się na dwóch podstawowych założeniach – koncepcji zgodności (*concordance*) oraz koncepcji braku niezgodności (*non-disconcordance*). Koncepcje te odnoszą się do wszystkich metod ELECTRE, różnice polegają na sposobie wyznaczania współczynnika zgodności oraz rozumienia warunku braku niezgodności.

Warianty decyzyjne (a_i , gdzie $i = 1, \dots, m$) oceniane są ze względu na n kryteriów (g_j , gdzie $j = 1, \dots, n$). Kryteria rozumiemy jako wielkości, których wartości są maksymalizowane (stymulanty). Każdemu kryterium przypisana jest dodatnia waga w_j . Zakładamy dalej, że wagi sumują się do jedności.

Porównując dwa warianty a_i oraz a_k , obliczamy najpierw wskaźnik przewyższania:

$$\varphi_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } g_j(a_i) \geq g_j(a_k), \\ 0, & \text{gdy } g_j(a_i) < g_j(a_k), \end{cases} \quad (2)$$

zgodnie z którym uzyskuje się odpowiedź na pytanie, czy ze względu na kryterium g_j wariant a_j nie jest gorszy od wariantu a_k . Na tej podstawie oblicza się wskaźnik zgodności:

$$c(a_i, a_k) = \sum_{j=1}^n w_j \varphi_j, \quad (3)$$

otrzymując odpowiedź na pytanie, jaka jest przewaga wariantu a_i nad wariantem a_k ze względu na wszystkie kryteria. Wskaźnik zgodności jest sumą wag tych kryteriów, przy których wartość oceny wariantu a_i jest większa lub równa wartości oceny wariantu a_k . Wskaźniki zgodności wyznaczane są dla wszystkich par wariantów, a następnie porównywane z zadaniem przez decydenta progiem zgodności s , który powinien być co najmniej równy połowie sumy wag kryteriów (0,5). Mówiąc inaczej, para wariantów spełnia warunek zgodności, gdy:

$$c(a_i, a_k) \geq s \wedge s \in [0, 5; 1]. \quad (4)$$

Zbiór par wariantów spełniających warunek zgodności oznaczamy C_s . Dla tego zbioru sprawdza się następnie, czy spełniony jest warunek braku niezgodności.

Identyfikacja niezgodności ma na celu eliminację sytuacji, w których porównanie wartości ocen wariantów jest szczególnie niekorzystne ze względu na przynajmniej jedno kryterium. W tym celu wprowadza się tzw. progi weta $v_j[g_j(a_i)]$ dla każdego kryterium, które są wielkościami przyjmowanymi przez decydenta. Warunek braku niezgodności jest spełniony, gdy dla każdego $j = 1, \dots, n$:

$$g_j(a_i) + v_j[g_j(a_i)] \geq g_j(a_k). \quad (5)$$

Większa od wartości progu weta $v_j[g_j(a_i)]$ różnica między wartościami ocen wariantów a_i i a_k dla przynajmniej jednego kryterium jest wskazaniem do odrzucenia relacji przewyższania między tymi wariantami.

Proces agregacji ocen w metodzie ELECTRE I obejmuje cztery etapy:

1) tworzenie macierzy zgodności C_s . Wyrazy tej macierzy wskazują wszystkie pary wariantów decyzyjnych, które spełniają przyjęty przez decydenta poziom zgodności s ;

2) tworzenie macierzy braku niezgodności D_v . Wyrazy tej macierzy wskazują pary wariantów decyzyjnych spełniające warunek braku niezgodności, czyli pary, które mieszają się w granicach wyznaczonych progiem weta;

3) tworzenie macierzy relacji przewyższania $S_{s,v}$. Wyrazy tej macierzy wskazują pary wariantów, które spełniają równocześnie warunek zgodności i warunek braku niezgodności;

4) konstrukcja grafu zależności między wariantami.

Na pierwszych trzech etapach konstruowane są macierze zero-jedynkowe wskazujące na występowanie (1) lub brak występowania (0) określonych relacji między wariantami. Na ostatnim etapie opracowuje się graf odzwierciedlający globalne relacje przewyższania badanego zbioru wariantów decyzyjnych.

4. Przykład zastosowania metody ELECTRE I

Opis problemu decyzyjnego

Przedmiotem decyzji jest wybór najatrakcyjniejszej technologii spośród pięciu możliwych do wdrożenia. W ocenie tych technologii zastosowano cztery kryteria: niezawodność, funkcjonalność, serwis, jakość. Przyjęto pięciostopniową skalę, gdzie nota 1 oznacza spełnienie danego kryterium w niewielkim stopniu, a nota 5 spełnienie w stopniu bardzo wysokim. Wyniki oceny przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki oceny pięciu technologii

Warianty decyzji	Kryteria oceny g_j			
	g_1 niezawodność	g_2 funkcjonalność	g_3 serwis	g_4 jakość
a_1 – technologia 1	3	2	4	5
a_2 – technologia 2	2	5	2	3
a_3 – technologia 3	2	3	5	2
a_4 – technologia 4	4	4	2	4
a_5 – technologia 5	4	3	1	5
Wagi w_j	0,25	0,15	0,35	0,25
Progi weta v_j	1	2	3	2

Źródło: opracowanie własne.

Decydent wyznaczył wagi kryteriów oceny w_j , progi weta v_j (tabela 2) oraz założył poziom zgodności $s = 0,65$. Podane informacje są wystarczające do wyznaczenia relacji przewyższania na podstawie metody ELECTRE I.

Etap 1. Tworzenie macierzy zgodności. W pierwszej kolejności wyznaczamy wskaźniki przewyższania dla wszystkich par wariantów decyzyjnych (technologii) względem poszczególnych kryteriów. W ten sposób powstają macierze Φ , których wyrazami są $\varphi(a_i, a_k)$. Na przykład wskaźniki (wzór 2) przewyższania względem kryterium g_1 (niezawodność) są równe:

$$g_1(a_1) \geq g_1(a_2) \rightarrow \varphi_1(a_1, a_2) = 1 \text{ (ponieważ } 3 \geq 2),$$

$$g_1(a_1) \geq g_1(a_3) \rightarrow \varphi_1(a_1, a_3) = 1 \text{ (ponieważ } 3 \geq 2),$$

$$g_1(a_1) < g_1(a_4) \rightarrow \varphi_1(a_1, a_4) = 0 \text{ (ponieważ } 3 < 4),$$

.....,

$$g_1(a_2) < g_1(a_1) \rightarrow \varphi_1(a_2, a_1) = 1 \text{ (ponieważ } 2 < 3) \text{ itd.}$$

Wskaźniki przewyższania dla wszystkich par wariantów (a_i, a_k) względem kryterium g_1 stanowią wyrazy macierzy Φ_1 . Podobne wyliczenia przeprowadzamy dla pozostałych kryteriów, czego wynikiem są macierze Φ_2, Φ_3 oraz Φ_4 (por. [Trzaskalik 2008, s. 239]). Macierze te pokazano w tabeli 3.

Informacje zawarte w macierzach wskaźników przewyższania pozwalają wyznaczyć wskaźniki zgodności wszystkich par wariantów, np.:

$$c(a_1, a_2) = 0,25 \cdot 1 + 0,15 \cdot 0 + 0,35 \cdot 1 + 0,25 \cdot 1 = 0,85.$$

Wartości tych wskaźników można obliczyć, wykonując działania na macierzach:

$$\mathbf{C} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4.$$

Tabela 3. Macierze wskaźników przewyższania

Macierz Φ_1 (niezawodność)						Macierz Φ_2 (funkcjonalność)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1	1	0	0	a_1	1	0	0	0	0
a_2	0	1	1	0	0	a_2	1	1	1	1	1
a_3	0	1	1	0	0	a_3	1	0	1	0	1
a_4	1	1	1	1	1	a_4	1	0	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	a_5	1	0	1	0	1

Macierz Φ_3 (serwis)						Macierz Φ_4 (jakość)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1	0	1	1	a_1	1	1	1	1	1
a_2	0	1	0	1	1	a_2	0	1	1	0	0
a_3	1	1	1	1	1	a_3	0	0	1	0	0
a_4	0	1	0	1	1	a_4	0	1	1	1	0
a_5	0	0	0	0	1	a_5	1	1	1	1	1

Źródło: opracowanie własne.

Z macierzy C wybierane są następnie pary elementów spełniające warunek zgodności. W ten sposób powstaje macierz zgodności C_s . W rozpatrywanym przypadku próg zgodności $s = 0,65$. Wszystkie wyrazy macierzy C wyższe lub równe 0,65 są w macierzy zgodności C_s równe 1, pozostałe ($<0,65$) są równe 0. Wyniki obliczeń podano w tabeli 4.

Tabela 4. Macierz wskaźników przewyższania i macierz zgodności

Macierz wskaźników przewyższania						Macierz zgodności (dla $s = 0,65$)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1,00	0,85	0,50	0,60	0,60	a_1	1	1	0	0	0
a_2	0,15	1,00	0,65	0,50	0,50	a_2	0	1	1	0	0
a_3	0,50	0,60	1,00	0,35	0,50	a_3	0	0	1	0	0
a_4	0,40	0,85	0,65	1,00	0,75	a_4	0	1	1	1	1
a_5	0,65	0,50	0,65	0,50	1,00	a_5	1	0	1	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Elementami zbioru zgodności przy progu 0,65 są następujące pary wariantów:

$$C_{s=0,65} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_5), (a_5, a_1), (a_5, a_3)\}.$$

Etap 2. Tworzenie macierzy braku niezgodności. Kolejnym etapem procedury agregacji ocen jest sprawdzenie warunku braku niezgodności. Najpierw badamy, czy pary wariantów są niezgodne ze względu na poszczególne kryteria. Do tego celu można wykorzystać następującą formułę:

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } g_j(a_k) > g_j(a_i) + v_j, \\ 0, & \text{gdy } g_j(a_k) \leq g_j(a_i) + v_j, \end{cases} \quad (6)$$

która pozwala wyznaczyć macierz niezgodności cząstkowych \mathbf{D}_j . Elementy tej macierzy $d_j(a_i, a_k)$ wskazują na niezgodne pary wariantów ze względu na j -te kryterium oraz przyjęty próg weta v_j . Dla rozpatrywanego przykładu macierze \mathbf{D}_j przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Macierze niezgodności cząstkowych

Macierz \mathbf{D}_1 (niezawodność)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	0	0	0	1	1
a_3	0	0	0	1	1
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0

Macierz \mathbf{D}_2 (funkcjonalność)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	1	0	0	0
a_2	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0

Macierz \mathbf{D}_3 (serwis)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0	0	1	0	0

Macierz \mathbf{D}_4 (jakość)					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	0	0	0	0	0
a_3	1	0	0	0	1
a_4	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Na przykład:

- w macierzy \mathbf{D}_1 : $g_1(a_4) > g_1(a_2) + v_1 \rightarrow d_1(a_2, a_4) = 1$, ponieważ $4 > 2 + 1$,
- w macierzy \mathbf{D}_2 : $g_2(a_2) > g_2(a_1) + v_2 \rightarrow d_2(a_1, a_2) = 1$, ponieważ $4 > 2 + 2$,
- w macierzy \mathbf{D}_3 : $g_3(a_3) > g_3(a_5) + v_3 \rightarrow d_3(a_5, a_3) = 1$, ponieważ $5 > 1 + 3$,
- w macierzy \mathbf{D}_4 : $g_4(a_1) > g_4(a_3) + v_4 \rightarrow d_4(a_3, a_1) = 1$, ponieważ $5 > 2 + 2$,

Na podstawie macierzy \mathbf{D}_j (tabela 5) wyznaczamy macierz braku niezgodności \mathbf{D}_v , której wyrazy są równe:

$$d_v(a_i, a_k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \sum_{j=1}^n d_j(a_i, a_k) = 0, \\ 0, & \text{gdy } \sum_{j=1}^n d_j(a_i, a_k) > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Brak niezgodności pary wariantów (a_i, a_k) występuje wówczas, gdy dla każdego j $d_j(a_i, a_k) = 0$. Macierz braku niezgodności dla omawianego przykładu pokazano w tabeli 6.

Tabela 6. Macierz braku niezgodności

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0	1	1	1
a_2	1	1	1	0	0
a_3	0	1	1	0	0
a_4	1	1	1	1	1
a_5	1	1	0	1	1

Źródło: opracowanie własne.

Wyrazy macierzy braku niezgodności równe 1 wskazują na przypadki tych relacji między parami wariantów, które mieszczą się w granicach wyznaczonych progami weta.

Etap 3. Tworzenie macierzy relacji przewyższania. Relacja przewyższania ma miejsce, gdy spełniony jest warunek zgodności i warunek braku niezgodności. Relacje przeważania można zapisać w postaci macierzy S o wyrazach:

$$s(a_i, a_k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } c_s(a_i, a_k) \cdot d_v(a_i, a_k) = 1 \\ 0, & \text{gdy } c_s(a_i, a_k) \cdot d_v(a_i, a_k) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

W tabeli 7 pokazano macierz relacji przewyższania dla analizowanego przykładu.

Tabela 7. Macierz relacji przewyższania

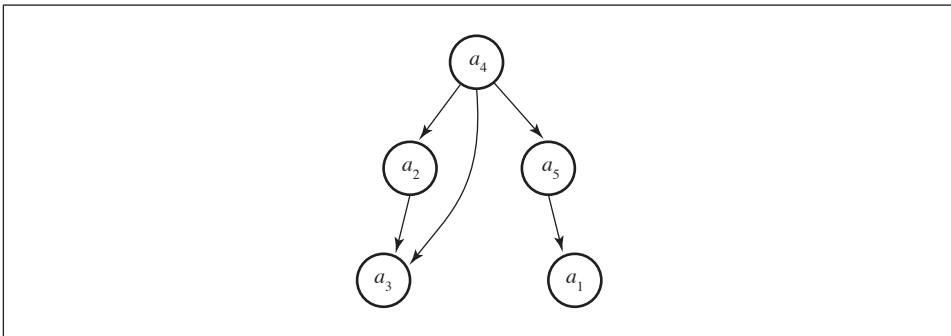
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0	0	0	0
a_2	0	1	1	0	0
a_3	0	0	1	0	0
a_4	0	1	1	1	1
a_5	1	0	0	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Elementami zbioru relacji przewyższania są zatem następujące pary wariantów:

$$\{(a_2, a_3), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_5), (a_5, a_1)\}.$$

Etap 4. Konstrukcja grafu zależności. Graf zależności między wariantami decyzyjnymi sporządzamy na podstawie danych zawartych w tabeli 6. Konstrukcję grafu rozpoczynamy od tych wariantów, które nie są przewyższane przez pozostałe warianty (zob. kolumny macierzy relacji przewyższania). W naszym przypadku wariantem takim jest a_4 . Umieszczamy go na najwyższym (pierwszym) poziomie. Następnie poszukujemy tych wariantów, które przewyższane są wyłącznie przez warianty usytuowane na poziomie pierwszym; są nimi wariant a_2 oraz wariant a_5 . Na kolejnym poziomie znajdują się warianty przewyższane jedynie przez dwa wyższe poziomy; jak można zauważyć wariant a_3 jest przewyższany przez a_4 z poziomu pierwszego i przez a_2 z poziomu drugiego, a wariant a_1 jest przewyższany przez wariant a_5 z poziomu drugiego. W ten sposób powstaje graf odzwierciedlający globalne relacje przewyższania (rys. 1).



Rys. 1. Graf zależności między wariantami

Źródło: opracowanie własne.

Wierzchołki grafu stanowią warianty decyzyjne, łuki łączące wierzchołki – relacje przewyższania. Brak łuków między węzłami oznacza nieporównywalność wariantów. Na przykład wariant a_2 jest nieporównywalny z wariantem a_1 , podobnie wariant a_5 z wariantem a_3 . Mimo to w rozważanym przykładzie analiza relacji przewyższania doprowadza do wskazania wariantu a_4 jako najlepszego.

W wielu przypadkach zastosowanie procedury agregacji ocen według wytycznych metody ELCTRE I nie daje jednoznacznego rozwiązania. Metoda ta ma charakter bardziej poznawczy. Jednoznaczne wyniki można uzyskać przez zastosowanie procedur proponowanych w innych metodach tej grupy (np. ELECTRE II).

5. Wyznaczania wag kryteriów oceny

Ostateczne zależności między wariantami zależą od przyjętych wag. Istnieje wiele sposobów wyznaczania wag kryteriów oceny. Poniżej przedstawiamy propozycję rekomendowaną dla rodziny metod ELECTRE. Procedura została zaprezentowana w pracy [Figueira i Roy 2002] i jest modyfikacją metody ustalania wag kryteriów podanej w pracy [Simons 1990].

Procedura pozwala przypisać wartości liczbowe (wagi) każdemu kryterium g_j ($j = 1, \dots, n$). Wszystkie kryteria są zapisywane na odpowiednio przygotowanych kartach i szeregowane w kolejności rosnącego ich znaczenia. Wyrazy szeregu ($r = 1, \dots, \bar{n}$) oznaczają rangi poszczególnych kryteriów (jedno lub wieloelementowych podzbiorów kryteriów). Z podzbiórami wieloelementowymi mamy do czynienia w sytuacji występowania rang wiązanych, czyli gdy niektóre kryteria są uznawane za równie ważne. Następnie decydent (ekspert) ustala różnice między kolejnymi rangami poprzez wprowadzenie dowolnej liczby pustych kart między wyrazy szeregu.

Niech \bar{e}_r oznacza liczbę pustych kart między rangami r i $r + 1$. Obliczamy $e_r = \bar{e}_r + 1$ (dla każdego $r = 1, \dots, \bar{n} - 1$), a następnie wartość:

$$e = \sum_{r=1}^{\bar{n}-1} e_r. \quad (9)$$

Ustalamy wielkość z , która oznacza ile razy kryterium o najwyższej randze jest ważniejsze od kryterium o najniższej randze. Na tej podstawie wyznaczamy nieznormalizowane wagi dla poszczególnych rang:

$$k(r) = 1 + \frac{z-1}{e} (e_0 + \dots + e_{r-1}), \text{ gdzie } e_0 = 0. \quad (10)$$

Z powyższej formuły wynika, że kryteriom o najniższej randze przypisuje się wagę $k(1) = 1$. Wartości wag odpowiadające kolejnym podzbióróm kryteriów zależą od ich rangi r , liczby pustych kart \bar{e}_r i przyjętej wartości z .

Ostatnim krokiem jest ustalenie wartości wag kryteriów w_j . Każdemu kryterium g_j przypisana jest ranga r oraz nieznormalizowana waga $k(r)$. W przypadku rang wiązanych ta sama wartość $k(r)$ odpowiada kryteriom o tej samej randze. Ostatecznie znormalizowana waga j -tego kryterium jest równa:

$$w_j = \frac{k(r)}{\sum_{r=1}^{\bar{n}} n_r \cdot k(r)}, \quad (11)$$

gdzie n_r oznacza liczbę kryteriów o r -tej randze.

W celu zobrazowania powyższej procedury posłużmy się przykładem. Do budowy kompleksowego systemu oceny projektów innowacyjnych przyjęto następujący zbiór kryteriów ($n = 9$): {A, B, C, D, E, F, G, H, I}, które uszeregowano w kolejności rosnącego znaczenia na następujące podzbiory ($\bar{n} = 6$): {E, H}, {D}, {A}, {B, G, I}, {F}, {C}. Różnice między rangami oceniono przez wprowadzenie białych kart (symbol #), co doprowadziło do następującego uporządkowania: {E, H}, #, #, {D}, {A}, #, {B, G, I}, #, #, #, {F}, #, {C}. Przyjęto, że kryterium najistotniejsze jest siedem razy ważniejsze od kryterium najmniej istotnego ($z = 7$). Wyznaczanie wartości wag dla rang kryteriów pokazano w tabeli 8.

Tabela 8. Wyznaczenie wartości wag odpowiadających rangom kryteriów $k(r)$

r	Kryteria	n_r	#	e_r	$k(r)$	$n_r \cdot k(r)$
1	{E, H}	2	2	3	1,0	2,0
2	{D}	1	0	1	2,5	2,5
3	{A}	1	1	2	3,0	3,0
4	{B, G, I}	3	3	4	4,0	12,0
5	{F}	1	1	2	6,0	6,0
6	{C}	1	7,0	7,0
Suma	–	9	–	12	–	32,5

Źródło: opracowanie własne.

Korzystając ze wzoru (11), można wyznaczyć wagi kryteriów, które sumują się do jedności. Zostały one pokazane w tabeli 9 dla wartości $z = 7$. W celu porównania podane zostały również wagi przy innych wartościach z .

Tabela 9. Wyznaczenie wartości wag kryteriów dla różnych wartości z

Kryteria	$k(r)$ dla $z = 7$	Waga w_j dla $z = 7$	Rozkłady wag dla różnych wartości z			
			$z = 2$	$z = 5$	$z = 10$	$z = 15$
E	1	0,0308	0,0774	0,0405	0,0226	0,0157
H	1	0,0308	0,0774	0,0405	0,0226	0,0157
D	2,5	0,0769	0,0968	0,0811	0,0734	0,0705
A	3	0,0923	0,1032	0,0946	0,0904	0,0888
B	4	0,1231	0,1161	0,1216	0,1243	0,1253
G	4	0,1231	0,1161	0,1216	0,1243	0,1253
I	4	0,1231	0,1161	0,1216	0,1243	0,1253
F	6	0,1846	0,1419	0,1757	0,1921	0,1984
C	7	0,2154	0,1548	0,2027	0,2260	0,2350
Suma	32,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Źródło: opracowanie własne.

Jak można zayważyć wartość z wyraża stosunek wagi najwyższej do wagi najniższej.

6. Podsumowanie

Metody ELECTRE mogą skutecznie wspomagać projektowanie złożonych systemów organizacyjnych. Okazują się one szczególnie użyteczne w sytuacjach, gdy dostępne informacje są niekompletne i nieprecyzyjne, co oznacza konieczność stosowania słabszej skali pomiaru (nominalnej, ewentualnie porządkowej) lub – w przypadku stosowania skali mocniejszej (np. przedziałowej) – uwzględnienia możliwości wystawiania błędnych ocen. W metodach ELECTRE preferencje decydenta są modelowane na podstawie binarnej relacji przewyższania, dzięki czemu identyfikacja zbioru rozwiązań racjonalnych uwzględnia trudności i ograniczenia procesu oceny. Zastosowanie koncepcji zgodności oraz braku niezgodności pozwala uniknąć podejmowania zbyt pochopnych decyzji. Generalnie, zgodność oznacza wystarczającą większość kryteriów, które potwierdzają relację przewyższania jednego wariantu nad drugim. Koncepcję braku niezgodności wyraża postulat, by kryteria niepotwierdzające relacji przewyższania nie były w zbyt dużej opozycji do stwierdzonych relacji preferencji ze względu na pozostałe kryteria. Podejście takie jest wyrazem ogólnego założenia o ograniczonej kompensacji, którego klasyczna teoria podejmowania decyzji nie uwzględnia.

Literatura

- Figueira J.R. *et al.* [2010], *ELECTRE Methods: Main Feature and Recent Developments* [w:] „Handbook of Multicriteria Analysis” Applied Optimization 103, Springer-Verlag, Berlin.
- Figueira J.R., Roy B. [2002], *Determining the Weights of Criteria in the ELECTRE Type Methods with a Revised Simos’ Procedure*, „European Journal of Operational Research”, nr 139.
- Lichtarski J. [1982], *Kryteria i metody oceny efektywności przedsięwzięć organizatorskich w przedsiębiorstwie*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 216, Wrocław.
- Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys* [2005], eds O. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Springer Science+Business Media, Inc., New York.
- Rogers M., Bruen M. [1998], *Choosing Realistic Values of Indifference, Preference and Veto Thresholds for Use with Environmental Criteria within ELECTRE*, „European Journal of Operational Research”, nr 107.
- Roy B. [1990], *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa.

Simons J. [1990], *Evaluer l'impact sur l'environnement: Une approche originale par l'analyse multicritère la et négociation*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.

Trzaskalik T. [2008], *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, Warszawa.

Using ELECTRE Methods in Designing Complex Organisational Systems

The paper focuses on a formal approach to the diagnosis and design of enterprise management systems when there is a lack of complete and accurate information. It first discusses the multicriteria evaluation system, in which the preferences of the decision-maker are modeled based on outranking relations. The binary outranking relation is typically used in ELECTRE methods. These methods involve a set of analytical procedures which allow the user to select, categorise and rank decision alternatives. The overall outranking preference in this method is developed according to the principle of concordance and discordance. In the article the basic relationships and thresholds used in preferences modeling are defined. The ELECTRE I method was introduced to illustrate this type of approach. The last part of the paper presents a method for determining the weights of evaluation criteria recommended for the ELECTRE methods. This method can also be used in other approaches to solve complex managerial decision problems.

Keywords: multicriteria decision-making, outranking relations, weights of criteria, preference analysis.